A Method of Collective Description of
Elmentary Excitations in Liquid He Ⅱ.

Ⅱ. Roton Excitations

東理大理・物理　五十嵐　靖　則
鈴　木　良　治

（9月30日受理）

Abstract 内部Hamiltonian によって記述される内部運動の内に含まれている新しい励起を，先に求めておいた内部座標を用いて，運動方程式の方法で基準振動の形に求め，実験とかなりよく一致する結果を得た。

§1. まえがき

先に[1]，液体ヘリウムⅡに於ける phonon excitation を Tomonaga の方法を応用して興味ある結果を得たが，今度は，内部Hamiltonian によって記述される内部運動の内に含まれている新しい励起を，先に求めておいた内部座標を用いて，基準振動の形に求めることにする。ここでは H_{in} のうち long－rang dipole－dipole interaction term は省略して計算を進めることにする。

§2. 内部Hamiltonian と基準座標

内部Hamiltonian H_{in} は次の形に求まっている[1]。

$$H_{in} = \sum_n \frac{P_n^2}{2m^*} + \frac{1}{2} \sum\sum_{n\neq n'} \sum_{|\kappa|>k_c} V_\kappa \cdot e^{i\kappa\cdot(r_n - r_{n'})}$$

$$- \sum\sum_{n\neq n} \sum_{k\neq 0}^{k_c} \frac{(k\cdot P_n)(k\cdot P_{n'})}{2Nmk^2} \cdot e^{ik\cdot(r_n - r_{n'})}$$

$$+ \sum\sum_{n\neq n'} \sum_{k\neq 0}^{k_c} \frac{\hbar[(k\cdot P_n) - (k\cdot P_{n'})]}{4Nm} \cdot e^{ik\cdot(r_n - r_{n'})}$$

$$+\frac{1}{2}N^2 V_{\kappa}(\kappa=0)-\frac{1}{2}N\sum_{k\neq 0}^{k_c} V_k \ , \tag{2·1}$$

ここで $m^* = m/(1-\frac{S}{3N})$.

H_{in} は一見すると，$\mathbf{r}_n$, $\mathbf{P}_n$ で記述されているように見えるのであるが，正しい意味での H_{in} の変数は内部変数 $\mathbf{R}_n$, $\mathbf{P}_n$ と考えられる。この $\mathbf{R}_n$ は先に[1]次の形に求まっていた。

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{r}_n + \frac{1}{N}\sum_{n'\neq n}\sum\sum_{q\neq 0}^{k_c} \frac{\mathbf{q}}{q^2}\cdot \sin \mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_{n'}) \tag{2·2}$$

全系の Hamiltonian によって記述される運動の mode のうちＳ個は longitudinal wave 即ち，phonon mode として既に Collective coordinateの方法で取り扱ったので，残りの（3N−S)の自由度を記述する部分は内部 Haniltonian と考えられ，その内部運動には transverse 的な運動の mode が存在しているかも知れない。そこで我々は roton excitation をこの残りの内部 Hamiltonian に含まれる内部励起であると考え，内部座標 $\mathbf{R}_n$ を用いて H_{in} を基準振動の形に求めることにする。

基準座標としては次の形に採るのが都合がよい。

$$\xi_r^{\mathbf{k}} = \frac{1}{N}\sum_n e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_n} \quad (|\mathbf{k}| > k_c) \tag{2·3}$$

$|\mathbf{k}| < k_c$ では $\xi_r^{\mathbf{k}} = 0$ となっている。

$\xi_r^{\mathbf{k}}$ を旧い変数で書けば，(2・2) を用いて，

$$\xi_r^{\mathbf{k}} = \frac{1}{N}\sum_n e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n + i\sum_{n'\neq n} g(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_{n'})} \tag{2·4}$$

ここで，$g(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_{n'}) = \frac{1}{N}\sum_{q\neq 0}^{k_c}\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})}{q^2}\sin \mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_{n'})$

§ 3. Calculation of internal excitation energy

— Roton excitation energy —

ここでは計算を簡単にするために，long－range dipole－dipole interaction は後で考慮することにして無視し，R.P.A を用い，運動方程式の方法で計算を行うことにする。

$$\dot{\xi}_r^{\mathbf{k}} = (i/\hbar)[H_{in},\ \xi_r^{\mathbf{k}}]$$

$$= \frac{i}{2m^* N}\sum_n \{\hbar(k + \sum_{j\neq n} \nabla_n g_{nj})^2 \cdot e^{ik\cdot r_n + i\sum_{j\neq n} g_{nj}}$$

$$+ 2(\mathbf{k} + \sum_{j\neq n} \nabla_n g_{nj}) \cdot e^{i\mathbf{k}\cdot \mathbf{r}_n + i\sum_{j\neq n} g_{nj}} \cdot \mathbf{p}_n$$

$$+ \hbar \sum_{i\neq n}\sum (\nabla_n g_{in})^2 \cdot e^{i\mathbf{k}\cdot \mathbf{r}_i + i\sum_{n\neq i} g_{in}}$$

$$+ 2 \sum_{i\neq n} \nabla_n g_{in} \cdot e^{i\mathbf{k}\cdot \mathbf{r}_i + i\sum_{n\neq i} g_{in}} \cdot \mathbf{p}_n \} \tag{3·1}$$

$$\ddot{\xi}_r^{\mathbf{k}} = (i/\hbar)[H_{in},\ \dot{\xi}_r^{\mathbf{k}}]$$

$$= (i/\hbar)[\sum_n \frac{\mathbf{p}_n^{\ 2}}{2m^*},\ \dot{\xi}_r^{\mathbf{k}}] + (i/\hbar)[\frac{1}{2}\sum_{n\neq n'}\sum\sum_{|\kappa|>k_c} V_\kappa\ e^{i\kappa\cdot(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n'})},\ \dot{\xi}_r^{\mathbf{k}}] \tag{3·2}$$

まず最初に第一項を計算する。

$$(i/\hbar)[\sum_n \frac{\mathbf{p}_n^{\ 2}}{2m^*},\ \dot{\xi}_r^{\mathbf{k}}] = -\frac{(1/\hbar)}{4m^{*2}N}\sum_n e^{i\mathbf{k}\cdot \mathbf{r}_n + i\sum_{i\neq n} g_{ni}} \{$$

$$h^3(k + \sum_{j\neq n} \nabla_n g_{nj})^4 + 2\hbar^3(k + \sum_{n\neq i} \nabla_i g_{in})^2 (\sum_{n\neq i} \nabla_n g_{in})^2$$

$$+ 3\hbar^2(k + \sum_{n\neq i} \nabla_i g_{in})^2 \cdot \sum_i \nabla_n g_{in} \cdot \mathbf{p}_n$$

$$+ 4\hbar \cdot (\mathbf{k} + \sum_{j\neq n} \nabla_n g_{nj})^2 \cdot \mathbf{p}_n^{\ 2}$$

$$+ 8\hbar \cdot (\mathbf{k} + \sum_{i\neq n} \nabla_n g_{ni}) \cdot \sum_{i\neq n} \nabla_i g_{ni} \cdot \mathbf{p}_n^{\ 2} \} \tag{3·3}$$

$$\doteqdot -\frac{\hbar^2}{4m^{*2}N}\cdot\sum_n e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n+i\sum_{j\neq n} g_{nj}}\{(\mathbf{k}+\sum_{j\neq n}\nabla_n g_{nj})^4$$

$$+\ 2(\mathbf{k}+\sum_{n\neq i}\nabla_i g_{in})^2(\sum_{n\neq i}\nabla_n g_{in})^2\} \qquad (3\cdot4)$$

ここで我々は，重心系に移し $\sum_n \mathbf{p}_n$ の項を消し，Bose condensation による近似を用いて $\mathbf{p}^2$ の項を無視した。

次に（3・2）式の第二項の計算を実行する。

$$(i/\hbar)\left[\frac{1}{2}\sum\sum_{n\neq n'}\sum_{|\kappa|>k_c} V_\kappa e^{i\kappa\cdot(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_{n'})},\ \dot{\xi}^{\mathbf{k}}_r\right]=\frac{1}{2m^*N}\{$$

$$\sum_{|\kappa|>k_c}\kappa\quad V_\kappa\cdot\sum\sum_{n\neq n'}\mathbf{k}\ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n+i\sum_{j\neq n} g_{nj}}\cdot e^{i\kappa\cdot(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_{n'})}$$

$$+\sum_{|\kappa|>k_c}\kappa\quad V_\kappa\cdot\ \sum\sum_{n\neq n'}\ \sum_{j\neq n}\nabla_n g_{nj}\ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n+i\sum_{j\neq n} g_{nj}}\cdot e^{i\kappa\cdot(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_{n'})}$$

$$-\sum_{|\kappa|>k_c}\kappa\quad V_\kappa\cdot\ \sum\sum_{n\neq n'}\mathbf{k}\ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{n'}+i\sum_{j\neq n'} g_{n'j}}\cdot e^{i\kappa\cdot(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_{n'})}$$

$$-\sum_{|\kappa|>k_c}\kappa\quad V_\kappa\ \sum\sum_{n\neq n'}\sum_{j\neq n'}\nabla_{n'} g_{n'j}\ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{n'}+i\sum_{j\neq n'} g_{n'j}}\cdot e^{i\kappa\cdot(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_{n'})}$$

$$+\sum_{|\kappa|>k_c}\kappa\quad V_\kappa\ \sum\sum_{n\neq n'}\sum_{j\neq n}\nabla_n g_{nj}\ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j+i\sum_{n\neq j} g_{jn}}\cdot e^{i\kappa\cdot(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_{n'})}$$

$$-\sum_{|\kappa|>k_c}\kappa\quad V_\kappa\ \sum\sum_{n\neq n'}\sum_{j\neq n'}\nabla_n g_{jn'}\cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j+i\sum_{n'\neq j} g_{jn}}\cdot e^{i\kappa\cdot(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_{n'})}\qquad\}$$

ここで，$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n+i\sum_{j\neq n} g_{nj}}\simeq e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}$ と近似すれば，

$$
\begin{aligned}
\doteqdot \frac{1}{2m^* N} \sum_{|\kappa|>k_c} \kappa \, V_\kappa \{ & \mathbf{k} \sum\sum_{n \neq n'} e^{i(\mathbf{k}+\kappa)(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_{n'})} \cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{n'}} \\
& + \sum_{n\neq n'}\sum_{j\neq n}\sum \nabla_n g_{nj} \, e^{i(\mathbf{k}+\kappa)\cdot(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_{n'})} \cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{n'}} \\
& + \mathbf{k}\cdot \sum\sum_{n\neq n'} e^{-i(\mathbf{k}-\kappa)\cdot(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_{n'})} \cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n} \\
& - \sum_{n\neq n'}\sum_{j\neq n'}\sum \nabla_{n'} g_{n'j} \, e^{-i(\mathbf{k}-\kappa)\cdot(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_{n'})} \cdot e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n} \\
& + \sum_{n\neq n'}\sum_{j\neq n}\sum \nabla_n g_{jn} \, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} \cdot e^{i\kappa\cdot(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_{n'})} \\
& - \sum_{n\neq n'}\sum_{j\neq n'}\sum \nabla_n g_{jn'} \, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} \cdot e^{i\kappa\cdot(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_{n'})} \quad \}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \frac{1}{2m^* N} \sum_{|\kappa|>k_c} \kappa \, V_\kappa \cdot \sum_n e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n} \{ & \mathbf{k} [S(\mathbf{k}+\kappa) - 1] \\
& + \int -\nabla g(\mathbf{r}) P_1(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} \cdot [S(\mathbf{k}+\kappa) - 1] \\
& + 2 \cdot \int \nabla g(\mathbf{r}) P_1(\mathbf{r}) \cdot e^{i(\mathbf{k}+\kappa)\cdot\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \\
& - \mathbf{k} \cdot [S(\mathbf{k}-\kappa) - 1] \\
& - \int -\nabla g(\mathbf{r}) P_1(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} \cdot [S(\mathbf{k}-\kappa) - 1] \\
& - 2 \cdot \int \nabla g(\mathbf{r}) P_1(\mathbf{r}) \, e^{i(\mathbf{k}-\kappa)\cdot\mathbf{r}} \, d\mathbf{r} \quad \}
\end{aligned}
\qquad (3\cdot5)
$$

ここで $P_1(r)$, $S(k)$ は二体相関関数とそのフーリェ成分である。二体相関関数 $P_1(r)$ を近似的に Fig 3—1 のようにとって（3・5）式の計算を実行すれば，

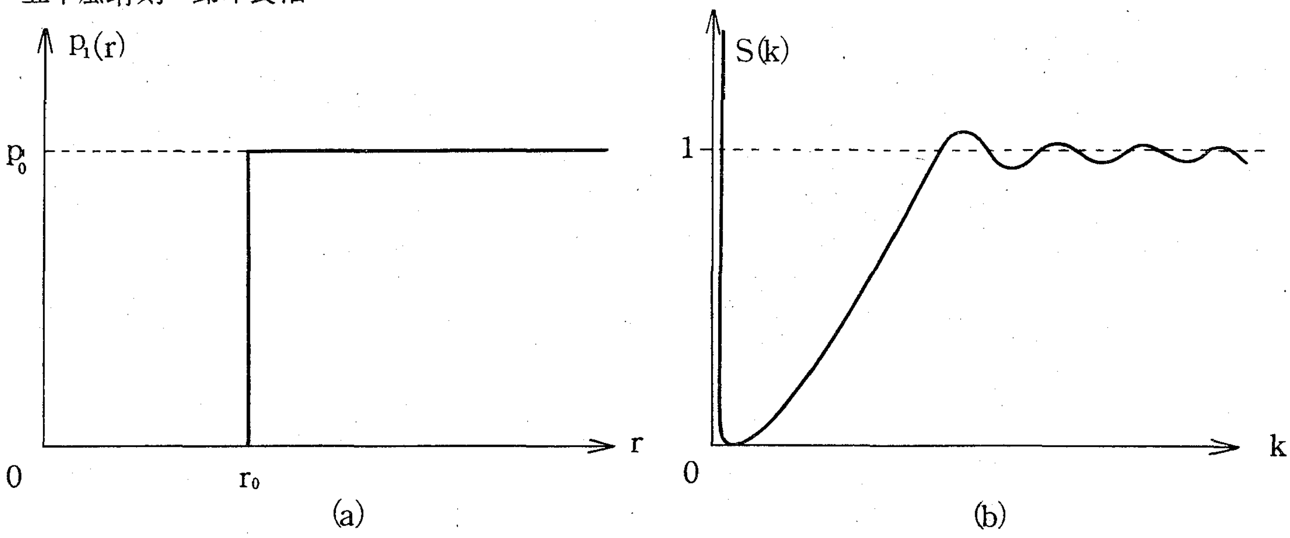

Fig 3—1

$$\doteqdot -\frac{1}{2m^{*}N}\sum_{n} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}\Big\{ 2\big(\mathbf{k}+\textstyle\int-\nabla g(\mathbf{r})P_1(\mathbf{r})d\mathbf{r}\big)\cdot N\cdot\mathbf{k}\,V_{\mathbf{k}}$$

$$+\ 2\big(\mathbf{k}+\textstyle\int-\nabla g(\mathbf{r})P_1(\mathbf{r})d\mathbf{r}\big)\cdot\displaystyle\sum_{|\boldsymbol{\kappa}|>k_c}\boldsymbol{\kappa}\,V_{\boldsymbol{\kappa}}\,3\,\frac{j_1(|\mathbf{k}+\boldsymbol{\kappa}|\cdot r_0)}{|\mathbf{k}+\boldsymbol{\kappa}|\cdot r_0}$$

$$-\ 2\cdot\textstyle\int\nabla g(\mathbf{r})P_1(\mathbf{r})\,e^{i(\mathbf{k}+\boldsymbol{\kappa})\cdot\mathbf{r}}d\mathbf{r}\cdot\displaystyle\sum_{|\boldsymbol{\kappa}|>k_c}\boldsymbol{\kappa}\ V_{\boldsymbol{\kappa}}\ \Big\} \qquad (3\cdot5')$$

従って，(3・4)，(3・5′)，(3・2) から

$$\ddot{\xi}_r^{\mathbf{k}} + \Big[\frac{\hbar^2}{4m^{*2}N}\Big\{\big(\mathbf{k}+\textstyle\int-\nabla g(\mathbf{r})P_1(\mathbf{r})d\mathbf{r}\big)^4$$

$$+\ 2\big(\mathbf{k}+\textstyle\int-\nabla g(\mathbf{r})P_1(\mathbf{r})d\mathbf{r}\big)^2\cdot\big(\textstyle\int-\nabla g(\mathbf{r}')P_1(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'\big)^2$$

$$+\ \frac{N}{m^{*}}\mathbf{k}\cdot\big(\mathbf{k}+\textstyle\int-\nabla g(\mathbf{r})P_1(\mathbf{r})d\mathbf{r}\big)V_{\mathbf{k}}$$

$$+\ \frac{1}{m^{*}}\big(\mathbf{k}+\textstyle\int-\nabla g(\mathbf{r})P_1(\mathbf{r})d\mathbf{r}\big)\cdot\displaystyle\sum_{|\boldsymbol{\kappa}|>k_c}\boldsymbol{\kappa}\ V_{\boldsymbol{\kappa}}\cdot 3\,\frac{j_1(|\mathbf{k}+\boldsymbol{\kappa}|\cdot r_0)}{|\mathbf{k}+\boldsymbol{\kappa}|\cdot r_0}$$

$$-\ \frac{2}{m^{*}}\textstyle\int\nabla g(\mathbf{r})P_1(\mathbf{r})\,e^{i(\mathbf{k}+\boldsymbol{\kappa})\cdot\mathbf{r}}d\mathbf{r}\cdot\displaystyle\sum_{|\boldsymbol{\kappa}|>k_c}\boldsymbol{\kappa}\,V_{\boldsymbol{\kappa}}\Big]\cdot\xi_r^{\mathbf{k}}\doteqdot 0 \qquad (3\cdot6)$$

よって，我々の $\xi_r^{\mathbf{k}}$ は H_{in} の基準座標になって居り，求める energy $\varepsilon_r(k)$ は

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_r(k) = \Big[& \left(\frac{\hbar^2}{2m^*}\right)^2 \Big\{ \left(\mathbf{k} + \int -\nabla\varphi(\mathbf{r})P_1(r)d\mathbf{r}\right)^4 \\
& + 2\left(\mathbf{k}+\int -\nabla\varphi(\mathbf{r})P_1(r)d\mathbf{r}\right)^2\left(\int -\nabla\varphi(\mathbf{r}')P_1(r')d\mathbf{r}'\right)^2 \Big\} \\
& + \frac{N}{m^*}\hbar^2 \mathbf{k}\cdot\left(\mathbf{k}+\int -\nabla\varphi(\mathbf{r})P_1(r)d\mathbf{r}\right) V_{\mathbf{k}} \\
& + \frac{\hbar^2}{m^*}\left(\mathbf{k}+\int -\nabla\varphi(\mathbf{r})P_1(r)d\mathbf{r}\right)\cdot \sum_{|\boldsymbol{\kappa}|>k_c} \boldsymbol{\kappa} V_{\boldsymbol{\kappa}} \cdot 3\frac{j_1(|\mathbf{k}+\boldsymbol{\kappa}|r_0)}{|\mathbf{k}+\boldsymbol{\kappa}|\cdot r_0} \\
& - \frac{2}{m^*}\hbar^2 \cdot \int \nabla\varphi(\mathbf{r})P_1(r)e^{i(\mathbf{k}+\boldsymbol{\kappa})\cdot\mathbf{r}}d\mathbf{r}\cdot \sum_{|\boldsymbol{\kappa}|>k_c} \boldsymbol{\kappa} V_{\boldsymbol{\kappa}} \Big]^{1/2}
\end{aligned}
$$

$$
(\,|\mathbf{k}| > k_c\,) \qquad (3\cdot 7)
$$

ここで $j_1(x)$ は第一種球ベッセル関数の一次を表わしている。

§ 4. Eestimation of excitation energy

ポテンシャルとしてSlater－Kirkwood Potential(2)に soft－coreを付け加えたポテンシャルを採って excitation energy を算出してみることにする。

$$
\begin{aligned}
V(r) &= V_0 \qquad (\,0 \leq r < b\,) \\
&= \alpha e^{-\mu r} - \beta\cdot r^{-6}
\end{aligned}
\qquad (4\cdot 1)
$$

ここで，

$$
\left\{
\begin{aligned}
\alpha &= 5.67\times 10^6\,[\,{}^\circ\mathrm{K}\,] \\
\beta &= 1.08\cdot\sigma^6 \\
&= 1.08\times 10^{-44}\,[\,{}^\circ\mathrm{K}\cdot cm^6\,] \\
\sigma &= 4.64\ [\mathrm{A}^\circ] \\
\mu &= 21.5/\sigma \\
&= 4.63\times 10^8\,[\,cm^{-1}\,]
\end{aligned}
\right.
$$

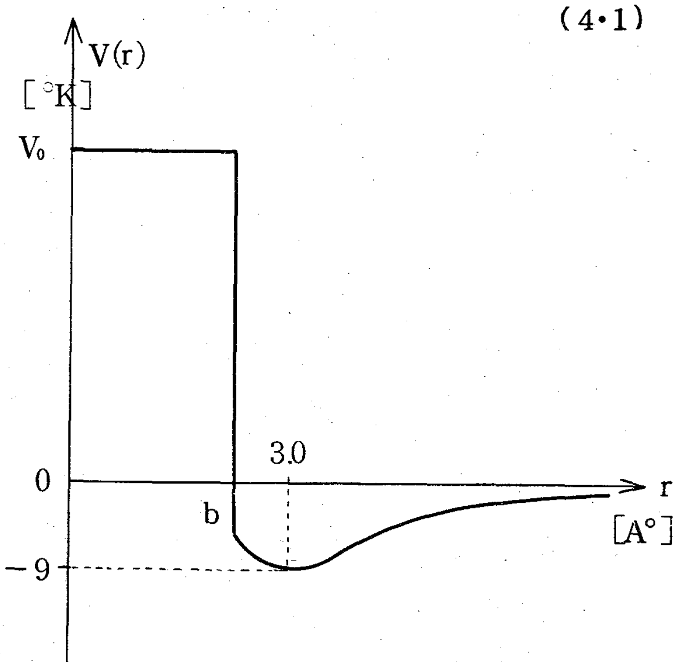

Fig. 4−1

effective soft－core radius b を，b＝2.7〔A°〕にとれば，$V_0 = 37.0$〔°K〕と，phonon theory の関係から決まる。V(r) の Fourier－Component $V_{\mathbf{k}}$ は，

$$
\begin{aligned}
V_{\mathbf{k}} = 4\pi \Big[& V_0 b^3 \frac{j_1(kb)}{kb} + \frac{\alpha \cdot e^{-\mu b}}{\mu^2+k^2} \{ \mu b^2 j_0(kb) + b\cos kb \\
& + \frac{1}{\mu^2+k^2} ((\mu^2-k^2) b j_0(kb) + 2\mu \cos kb) \} \\
& - \beta \{ (\frac{1}{4} \frac{1}{b^3} - \frac{1}{4\cdot3\cdot2} \frac{k^2}{b}) j_0(kb) \\
& + (\frac{1}{4\cdot3} \frac{1}{b^3} - \frac{1}{4\cdot3\cdot2} \frac{k^2}{b}) \cos kb \\
& + \frac{1}{4\cdot3\cdot2} k^3 \cdot (\frac{\pi}{2} - S_i(kb)) \} \Big]
\end{aligned}
\qquad (4\cdot2)
$$

(3·7) 式に於て，

$$
\begin{aligned}
\gamma \equiv \frac{1}{k^4} \{ & (\mathbf{k} + \int -\nabla\varphi(\mathbf{r}) P_1(r) d\mathbf{r})^4 \\
& + 2(\mathbf{k} + \int -\nabla\varphi(\mathbf{r}) P_1(r) d\mathbf{r})^2 \times \\
& \times (\int -\nabla\varphi(\mathbf{r}') P_1(r') d\mathbf{r}')^2 \}
\end{aligned}
$$

$$
\delta \equiv \frac{1}{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{k} + \int -\nabla\varphi(\mathbf{r}) P_1(r) d\mathbf{r}) \qquad (4\cdot3)
$$

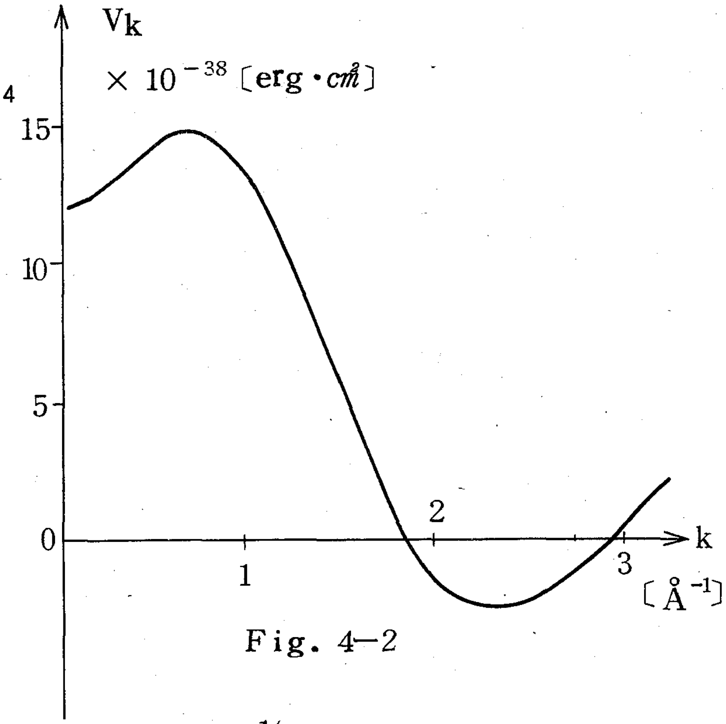

Fig. 4—2

とおき，第4項及び第5項を無視し，主要項だけに限れば，

$$
\varepsilon_r(k) \fallingdotseq \Big[\Big(\frac{\hbar^2}{2m^*} \Big)^2 \gamma\, k^4 + \frac{N}{m^*} \hbar^2 \delta\, k^2 V_{\mathbf{k}} \Big]^{1/2} \qquad (4\cdot4)
$$

$k > k_c$（$k_c = 0.8$〔$Å^{-1}$〕，b＝2.7〔A°〕）に対する $\varepsilon_r(k)$ の概算の数値は次に示す表の通りである。

$b = 2.7$ [A°], $k_c = 0.8$ [$\mathring{A}^{-1}$], $S/N \doteqdot 0.4$

k[$\mathring{A}^{-1}$]	$\varepsilon_r(k)$ [erg]	$\varepsilon_r(k)/\kappa$ [°K]	Exp. (H.W.)[4] [°K]
0.8	21.0	15.2	12.7
1.0	24.5	17.7	13.6
1.2	25.7	18.6	13.8
1.4	24.4	17.7	13.0
1.6	20.6	14.9	11.2
1.8	15.1	10.9	9.3
1.9	11.4	8.3	8.7
2.0	9.8	7.1	9.0
2.1	10.5	7.6	10.0
2.2	13.2	9.5	11.7
2.3	17.1	12.4	13.6
2.4	22.3	16.2	15.5

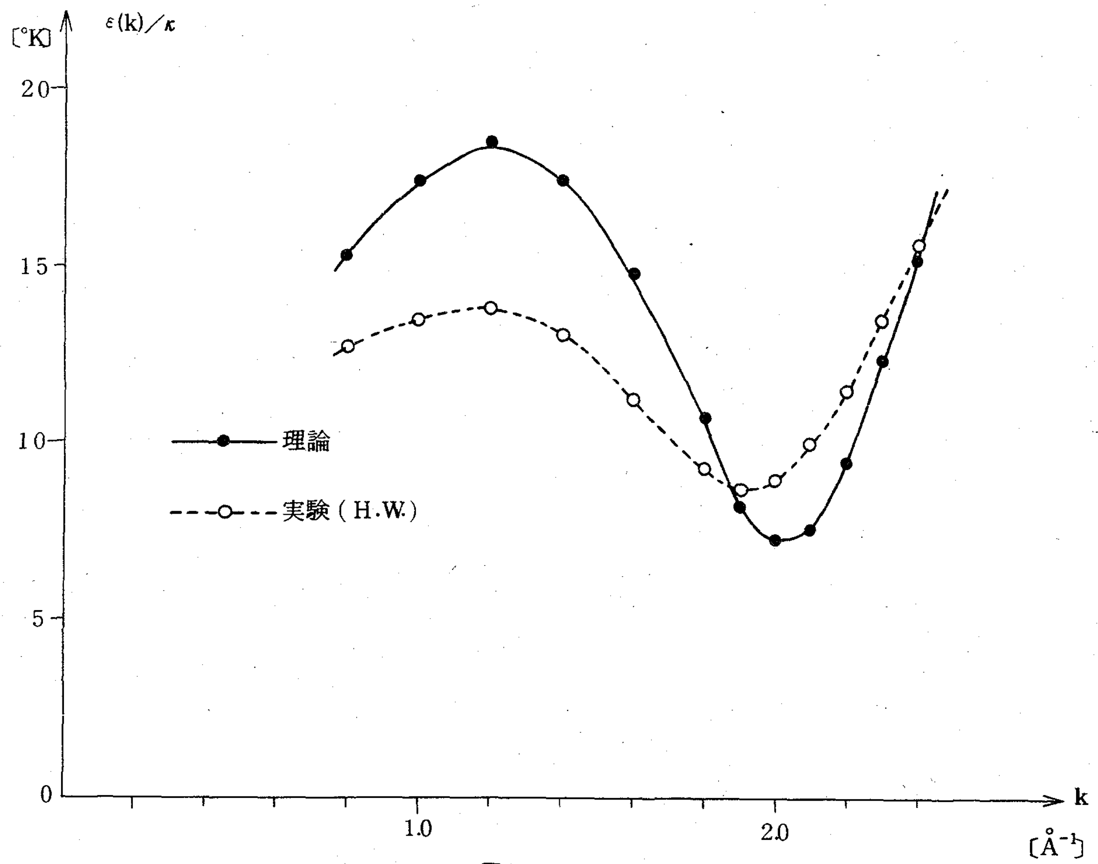

Fig. 3−4

§5. むすび

我々は roton excitation を phonon collective motion に対する internal motion による励起であるという立場から，internal Hamiltonian の normal mode を求めてきた。内部励起を記述する基準座標としては，先に[1]導入しておいた内部座標 $\mathbf{R}_n$ を用いて $\xi_r^{\mathbf{k}} = \frac{1}{N}\sum_{n_k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_n}$ の形に仮定した。この座標を系の基底状態に operate してできる状態，$\xi_r^{\mathbf{k}} | 0 \rangle$ は系の励起状態を表わすことになるが，この励起状態はちょうど Feynman－Cohen[3] たちの仮定した励起状態と同じ形になっている。

我々はこの計算では，long－range dipole－dipole interaction term を無視し，又最後の計算で potential term の two－particle correlation term を無視して主要項だけを拾って概算してみたのであるが，得られた Energy spectrum の形は実験とかなりよく一致している。ここで無視した項を拾って正しく，精密に計算を実行すれば，より実験値に近い結果が得られることを期待できると思われる。更に，(2・3) 式に仮定した roton 座標に正準共役な運動量を見い出し，Tomonaga の方法を用いて内部 Hamiltonian H_{in} を roton Hamiltonian と他の部分に分離して計算を進めれば，内部励起の問題がより精密に取り扱われ得るようになり，内部励起の構造研究への新しい道が開けて行くであろう。

References

(1) 五十嵐靖則，鈴木良治，物性研究 Vol. 18 No. 5 (1972) 195.
(2) J.C.Slater and J.G.Kirkwood, Phys. Rev. 37 (1931) 682.
(3) R.P.Feynman and M.Cohen, Phys. Rev. 102 (1956) 1189.
(4) D.G.Henshaw and A.D.B.Woods, Phys. Rev. 121 (1961) 1266.
R.A.Cowley and A.D.B.Woods, Canadian Journal of Physics 49 (1971) 177.